

真的“久赌必输”吗？

陈增敬 严晓东

赌博是一种非常具有好奇和吸引力的游戏，它广泛地传播在社会的各个阶层。赌博游戏的种类很多，但是，我们从我们的父辈，也许我们的父辈从他们的父辈，得到一个共同的忠告：久赌必输！真的久赌必输吗？赌博的赢或输到底是取决于赌博的必然性还是它的偶然性呢？多少年来，人们试图从不同的方面解开“久赌必输”背后隐藏的奥秘。真正从数学层面提出该问题研究的是概率专家 Pyke 教授。他受著名物理学家帕隆多 (Parrondo) 提出的帕隆多悖论 (Parrondo's paradox) 的影响，提出了一个大胆的猜想：双臂老虎机产生“久赌必输”的原因是双臂老虎机存在帕隆多悖论。帕隆多悖论是：交叉运行两个独立运行是失败（输）的游戏，也会产生赢的机会。即 失败+失败=成功。帕隆多悖论在生物、物理和化学等领域都得到了验证。Pyke 的猜想激发了数学家和物理学家对该问题研究的兴趣。现在，有一大批学者投入到了解密“久赌必输”奥秘的研究之中。Ethier 和 Lee 更是提出了一个大胆猜想：经典的双臂赌博机，按照赌博双方提前预定的赌博策略（随机策略或确定策略），对赌徒来说，一定遵循“久赌必输”的规律。他们利用概率的方法，证明了在随机策略下，他们的猜想是对的。最近，陈增敬和梁怀瑾(2023)证明了 这个猜想对确定策略也是对的。证明详见论文 <https://doi.org/10.48550/arXiv.2310.08935> 或 [arXiv:2212.11766](https://arxiv.org/abs/2212.11766)。

一、双臂老虎机问题 (Two-armed bandit problem)

双臂老虎机最早是 1936 年由芝加哥米尔斯新奇公司 (Mills Novelty Company of Chicago) 设计的一种名为“the Futurity slot machine”的赌博机（见图 1）。该赌

博机设计的原理: (1) 双臂老虎机每只手臂单独运行时, 手臂赢利是公平的 (称其为公平手), 即赌徒和赌博机所有者在做 N 次赌博实验后, 双方的获益是相等的。(2) 如果赌徒连续输掉 $J = 10$ 次, 那么这 $J=10$ 次输掉的硬币将被返还给赌徒 (被称为 the Futurity award); **赌博策略原理:** 赌博的策略可以采用随机和确定两种方式: 随机策略是事先预备一个硬币, 通过投硬币的正反面来确定动用左右手, 例如: 如果硬币出现正面, 双臂老虎机出左臂, 反之, 双臂老虎机出右臂; 确定性策略是赌徒与赌博机经营者提前协商好双臂老虎机出动左右臂的次数和顺序, 例如: 用 A 表示右手, B 表示左手。策略 AAB 表示先动两次右手再动一次左手, 这样无限周期重复地进行下去。同理, 策略 AAABB 表示先动三次右手再动两次左手, 无限周期重复地进行下去。



图 1: The Futurity slot machine

二. 双臂赌博机隐含的非线性概率问题

单臂老虎机是最简单的赌博机, 概率论的最基本模型是 Bernoulli 概率模型, 这概率模型的特点是独立同分布 (IID)。由于数学家们在 IID 条件下得到了大

数定理和中心极限定理，因此，科学工作者可以用独立同分 (IID) 下的大数定理和正态分布来计算赌博公司的收入及其该收入所面临风险的概率。对双臂老虎机而言，一个重要的问题是：是否可以设计一个双臂老虎机比单臂老虎机更有利于赌博公司？科学问题就是：可否设计一个双臂老虎机，如果两个臂单独运行、对赌博公司是必输的，但两个臂交叉运行，反而可以使得赌博公司必赢？也就是说两个失败的手，交替运行反而变成赢利之手，即 失败+失败=成功，这种现象在物理中被称为帕隆多悖论 (Parrondo's paradox)。一个自然的问题是：双臂老虎机是否也存在帕隆多悖论？由于双臂老虎机的每只手获益不同，因此，它不符合概率论的独立同分布假设，数学上的难点问题：非独立同分布的随机变量遵循什么样大数定律和中心极限定理？或者说：自 De Moivre、Gauss 等数学家在 IID 条件下发现线性正态分布（又称高斯分布）以来，我们是否从双臂老虎机中发现非 IID 的非线性正态分布密度函数的显示表达式？是否可以像传统单臂赌博机一样，可以计算收入的平均值和方差等参数？双臂老虎机是否依然遵循“久赌必输”的规律？这些问题的研究对概率论从线性到非线性的发展有着重要的意义。

针对此类问题, Pyke (2003)发现双臂老虎机的研究与帕隆多悖论 (Parrondo's paradox) 有着密切的联系。Ethier 和 Lee (2010) 利用概率的方法，对此类问题进行了研究并取得了重要进展。他们在一定条件下回答了 Pyke (2003)提出的问题，即利用马尔科夫链构造了双臂老虎机版本的 Mills Futurity 双臂赌博机，具体来说：令 p_A 和 p_B 分别表示左臂 A 和右臂 B 的每次的收益概率，那么，如下定理成立。

Ethier&Lee 定理：如果 $p_A \neq p_B$ ，如果赌博双方按照随机策略模式下（即事

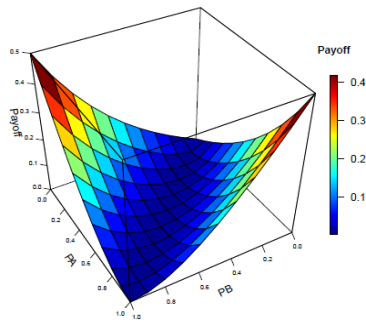
先预备一个均匀的硬币，通过投硬币的正反面来确定动用左右手) 进行赌博。如果赌徒连续输两次，赌博公司将这两次的赌金返还给赌徒。这种情况下，如果双臂赌博机的每个臂至少必须运行一次，则赌徒最终必定输，即赌徒将遵循“久赌必输”的规律。

Ethier&Lee 猜想：对这类双臂赌博机，如果将 Ethier 和 Lee 定理中随机策略换成确定策略，即赌徒与赌博机经营者提前协商好双臂老虎机左右臂出动的策略次数和顺序进行赌博，那么，赌徒依然遵循“久赌必输”的规律。

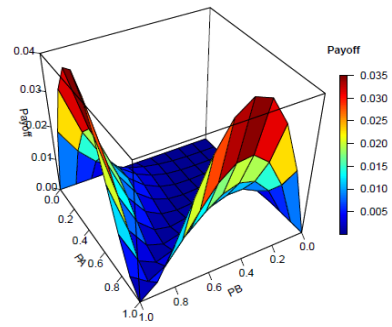
针对以上猜想，陈增敬和梁怀瑾(2023)证明了：对任何确定策略，赌徒都遵守“久赌必输”这个规律。

三. 双臂赌博机收益模拟

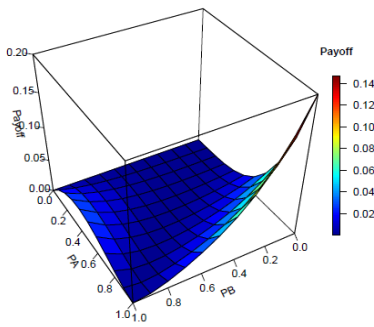
图 2 是确定策略下，赌场收益的蒙特卡洛模拟。赌场收益是单臂盈利概率 p_A 和 p_B 函数的三维曲面。针对四种不同的确定策略，四个图都显示了在每种确定赌博策略下，赌场获益不同的正盈利。



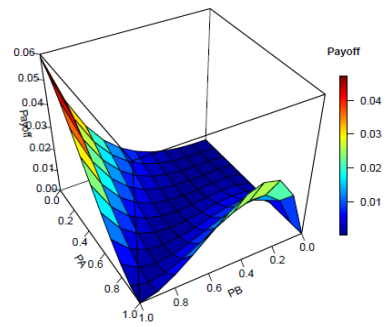
(a) $D = AB$



(b) $D = AABB$



(c) $D = AAABB$



(d) $D = A \dots AB \dots BA \dots \dots ABBB$

图 2: 在四种确定策略下赌场的收益

图 3 是随机策略下, 赌场收益的蒙特卡洛模拟。 p_T 是硬币出现正面的概率, 分别取值为 0.1、0.3、0.5、0.7 和 0.9。赌场收益三维曲面结果如下:

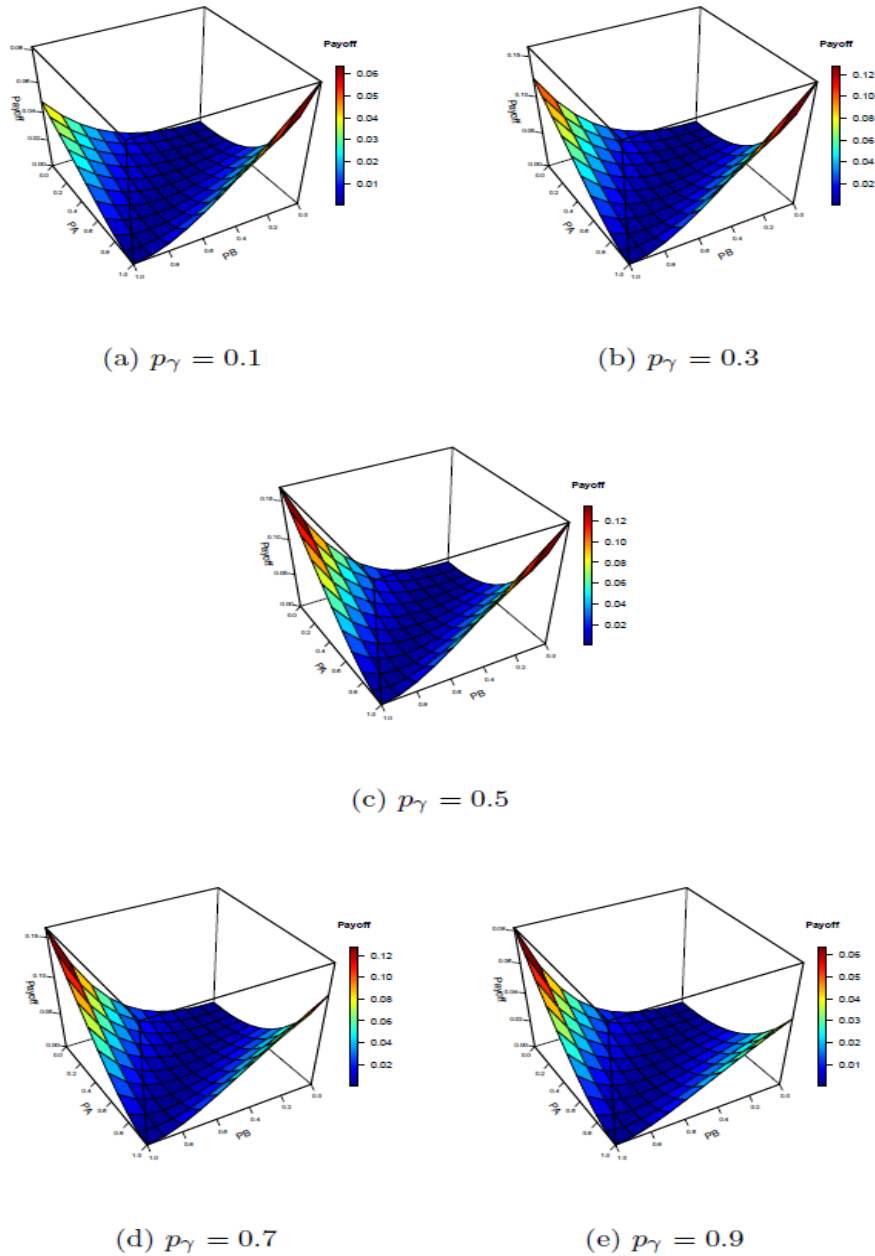


图 3: 在随机赌博策略及以 p_γ 随机选择手臂 A 下, 赌场平均回报三维图

陈增敬等(2023) 通过理论证明和模拟实验证明了我们的父辈的忠告: “久赌必输”是真的。因此, 参与赌博的赌徒一定要谨慎, 千万不能沉迷于赌博。另外, 这问题也告诫我们, 自然界也存在的大量 服从失败+失败=成功的规律的现象。因此, 面对失败不要气馁, 要善于利用失败。尽管我们只证明了双臂老虎机存在着“久赌必输”的现象。事实上, 美国数学家 Kelly 在上世纪五十年代曾证明过 一种称为“21 点”的赌博游戏也存在着 “久赌必输”现象。因此, 我们有理由相信: 任

何赌博都可能存在“久赌必输”现象，只是数学家不可能、也没有必要都去证明这结论。